A1. Sterne

Rainer Maria Rilke, Nr. XXIV aus: Traumgekrönt, Die Gedichte, S. 83

1. Einführung

Dieses Buch handelt von den regelmäßigen Sternfiguren und ihrem Erscheinen in der Natur. Dabei geht es um die Eigenschaften der einzelnen Figuren, die Beziehungen zwischen verschiedenen von ihnen und die Muster, die mehrere gleiche oder auch unterschiedliche Sternfiguren bilden. Man könnte dies vergleichen mit Individuen, den Beziehungen zwischen mehreren Individuen und den größeren Gemeinschaften, die diese eingehen können.

Bevor die geometrischen Grundlagen der Sternfiguren geklärt werden, werfen wir zum Auftakt des Kapitels einen Blick auf einen Blütenstern.

Abb. 1.0 Dahlienart mit Achtstern

In den Sternen, wie sie in vielen Blüten auftauchen, haben wir natürlich nicht die Exaktheit einer geometrischen Figur. Gleichwohl paßt die Überlagerung der organischen Form mit einer regelmäßigen Sternfigur oftmals ausgezeichnet. In den späteren Kapiteln werden wir uns mit solchen Zusammenhängen ausführlicher beschäftigen.

Ob eine Sternfigur regelmäßig ist oder nicht, erkennen wir intuitiv – zumindest sofern die Abweichungen einigermaßen deutlich sind. In Abb. 1.1a (nächste Seite) liegen nicht alle Spitzen auf einem Kreis, in Abb. 1.1b liegen sie auf dem Kreis, doch die Abstände der Punkte sind nicht gleich, in Abb. 1.1d liegen sie auf dem Kreis und die Abstände sind gleich, aber es wird nicht regelmäßig jeder soundsovielte Punkt verbunden. Natürlich gibt es auch gemischte Formen.

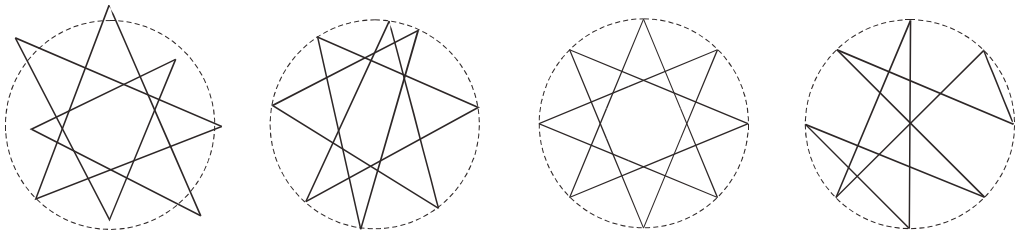


Abb. 1.1 Achtsterne I

Beim regelmäßigen Achtstern in Abb. 1.1c wird jeder 3. Punkt auf einem achtfach unterteilten Kreis durch eine Gerade verbunden, die Abstände der Punkte auf dem Kreis sind gleich und damit auch die Seitenlängen und die auftretenden Spitzenwinkel und andere Größen.

Weiterhin gibt es zwei verschiedene Arten, Sterne darzustellen. Abb. 1.2 zeigt das wiederum für den Achtstern. Der Stern in Abb. 1.2a besteht aus den 16 Seiten der Spitzen des Achtsterns in 1.2b. Abb. 1.2c ist eine nicht mehr ganz regelmäßige Variante von 1.2a, in der die Winkel verändert sind, die Spitzen können nicht mehr durch eine Gerade verbunden werden.

Mathematisch sind die beiden regelmäßigen Typen natürlich in etlichen Aspekten gleich. Doch fehlt in 1.2a sozusagen das Innenleben, oder es ist verhüllt. Man sieht eigentlich nur die Sternhülle. Das Innere eines Sterns spielt jedoch bei unseren Untersuchungen eine sehr wichtige Rolle, und darum werden wir uns hier im wesentlichen mit den Sternfiguren des Typs b beschäftigen.

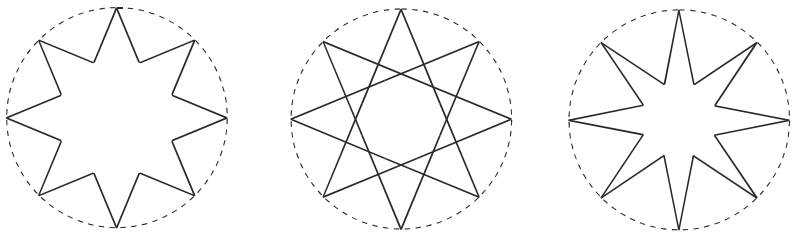


Abb. 1.2 Achtsterne II

Sterne entstehen also aus dem Kreis, einem Symbol der Unendlichkeit. Sie haben zunächst keine konkrete Größe, die in ihnen geltenden Gesetzmäßigkeiten sind von einem bestimmten Längenmaß (z.B. der Seiten oder des Radius des Umkreises) unabhängig.

Jedoch haben Sterne stets mit einer bestimmten ganzen Zahl zu tun. Einen Fünfeinhalbstern z.B. gibt es nicht. Der erste Schritt ist, den Kreis regelmäßig in n (n steht für eine beliebige natürliche Zahl[1]) gleiche Teile zu unterteilen. Dies kann, wenn man einen Stern zeichnen möchte, für viele Zahlen mit Hilfe von Zirkel und Lineal geschehen, aber längst nicht für alle. Die Sieben ist die erste Zahl, die eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal nicht erlaubt. Man kann natürlich den betreffenden Winkel berechnen und mit einem Winkelmesser abtragen. Doch soll das Thema der Konstruierbarkeit hier nicht vertieft werden. (Die geometrischen Grundkonstruktionen werden in Anhang A6 gezeigt.)

[1] Natürliche Zahlen sind die positiven ganzen Zahlen einschließlich Null, also 0, 1, 2, 3, 4 usw.. Einen Minus-Sieben-Stern gibt es also auch nicht. Man könnte ihn höchstens so definieren, daß die Laufrichtung (von Punkt zu Punkt) entgegengesetzt ist.

Sternerzeugung

Nachdem der Kreis unterteilt ist, gibt es zwei Methoden der Sternerzeugung. Zum einen werden Punkte regelmäßig durch Geraden verbunden, z.B. jeder zweite oder jeder dritte Punkt, bis der Ausgangspunkt wieder erreicht ist. Der so entstandene Stern liegt im Inneren des Ausgangskreises (mittlerer blauer Kreis in Abb. 1.3). Wenn wir benachbarte Punkte verbinden, entsteht eine Eckfigur, auch Polygon genannt. Eine Eckfigur ist also in gewisser Weise eine Sonderform eines Sterns. Andererseits gibt es jedoch einen wesentlichen Unterschied, wie wir später noch sehen werden.

Die zweite Methode besteht darin, durch jeweils benachbarte Punkte des Ausgangskreises Geraden zu ziehen, bis sich diese schneiden. Der Stern bildet sich außerhalb des Kreises, jedenfalls zum größten Teil, nur das Polygon, das seine Geraden innen zeichnen, liegt noch im Kreis. Dies alles ist aus der Abb. 1.3 ersichtlich, wieder exemplarisch für den Achtstern. Interessant wäre, in welchem Verhältnis die innen und außen entstandenen Sterne zueinander stehen; dies werden wir zu einem späteren Zeitpunkt untersuchen.

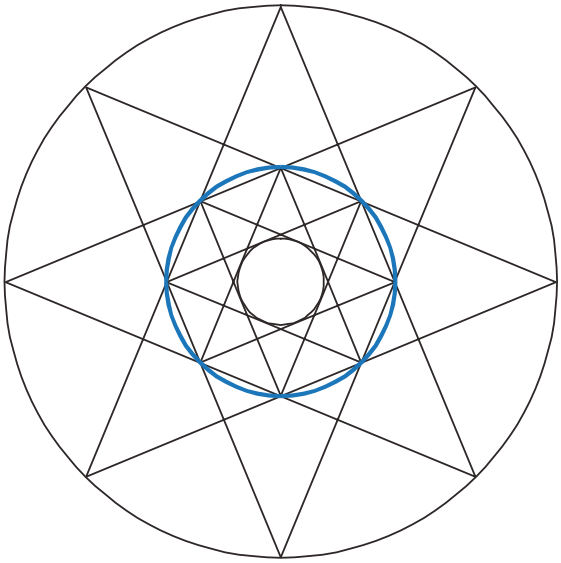


Abb. 1.3 Sternerzeugung, mittlerer Kreis: Ausgangskreis

Das Innere der Sterne

Ich sprach vom Innenleben der Sterne. In der Abbildung 1.3 sehen wir bei beiden Methoden, daß sich im Inneren des Sterns durch die Schnittpunkte weitere Figuren bilden. Beim Achtstern sind das eine Figur aus zwei Quadraten und das Achteck. Die Figur aus zwei Quadraten bezeichnen wir auch als Sternfigur, sie trägt sogar einen besonderen Namen, man spricht in Indien vom Lakshmi-Stern, dem eine symbolische Bedeutung beigemessen wird (siehe Glossar), im islamischen Bereich von Khatim oder Rub al-hizb. Wie das Hexagramm aus zwei Dreiecken ist er eine zusammengesetzte Figur, der allgemeine Fachbegriff hierfür ist Mehrfachpolygon. Ganz im Inneren entsteht, wie gesagt, das Achteck.

Welche Figur erhalten wir, wenn wir jeden 5. Punkt des Achtecks miteinander verbinden?

Dies ist eine allgemeine Gesetzmäßigkeit für alle regelmäßigen Sternfiguren:

Im Inneren eines regelmäßigen n-Sterns liegt immer ein n-Eck. In dieses können wir einen Inkreis einzeichnen, der die Mittelpunkte aller Seiten dieser Eckfigur berührt. Jeder regelmäßige Stern hat zudem einen Umkreis, der alle Spitzen berührt.

Insofern ist die Sternfigur das Primäre, sie zeichnet das Polygon mit, umgekehrt ist das nicht der Fall.

In Abb. 1.4 sehen wir alle Sternfiguren bis zum 12-Stern. Auf der rechten Seite ist jeweils der größtmögliche (oder schlankste) Stern zu sehen, ganz links das zugehörige Polygon. Wir sehen, daß sich Sterne gerader und ungerader Zahlen (kurz: gerade/ungerade Sterne) unterschiedlich verhalten. Bei geraden Zahlen können wir (im Polygon) zusätzlich noch die jeweils 180° gegenüberliegenden Punkte verbinden. Es entsteht eine Strahlfigur, man kann auch von einem Linienstern sprechen. Alle anderen Figuren haben eine Fläche und einen Inkreis, Größen, auf die es bei den weiteren Betrachtungen ankommen wird. Den Strahlfiguren mangelt es daran; zudem werden sie bei den angesprochenen Sternkonstruktionen aus dem Kreis nicht automatisch mitgezeichnet. Daher werden sie in diesem Buch nur an einigen wenigen Stellen betrachtet, wo ihnen dann aus anderen Gründen eine Bedeutung zukommt.

Ein ungerader und ein gerader Stern bilden jeweils ein Paar, das die gleiche Anzahl von Figuren in sich birgt. Fünf- und Sechstern erzeugen innen nur ihr Polygon. Bei Sieben- und Achstern kommt ein weiterer Stern dazu, beim Neun- und Zehnstern zwei und so weiter. Die Liniensterne zählen wir nicht mit, man könnte sie aber eventuell als halben Stern zählen, wenn man denn möchte.

Wir sehen weiterhin, daß wir zwischen echten und zusammengesetzten Sternen unterscheiden können. 'Echte Sterne' bedeutet, sie können in einem Linienzug gezeichnet werden (was natürlich auch für Eckfiguren gilt). Bei den zusammengesetzten unterscheidet man zwischen Mehrfachpolygonen – das erste in der Reihe ist der Sechsstern – und Mehrfachsternen. Der erste Mehrfachstern ist der große Zehnstern, der sich aus zwei Fünfsternen aufbaut.

Wieviel echte Sterne gibt es bei der Zahl 11?

Bis zur Zahl Zwölf einschießlich bilden sich genau 12 echte Sterne und, wenn man in diesem Fall die Liniensterne mitzählt, 12 zusammengesetzte Sterne. Dies ist als ein erster Hinweis anzusehen, daß die Zahl Zwölf im Reich der Sterne – und vielleicht nicht nur dort – eine ganz besondere Rolle spielen wird.

Bei Primzahlen (5, 7, 11 ..) treten ausschließlich echte Sterne auf.

Die Sternfiguren haben also einen Bezug zur Primzahlproblematik. Bis heute wurde ja kein mathematisches Gesetz gefunden, mit dem man feststellen kann, ob eine Zahl Primzahl ist; man kann es nur ausprobieren. Im Exkurs 11 werden wir hierauf noch etwas eingehen.

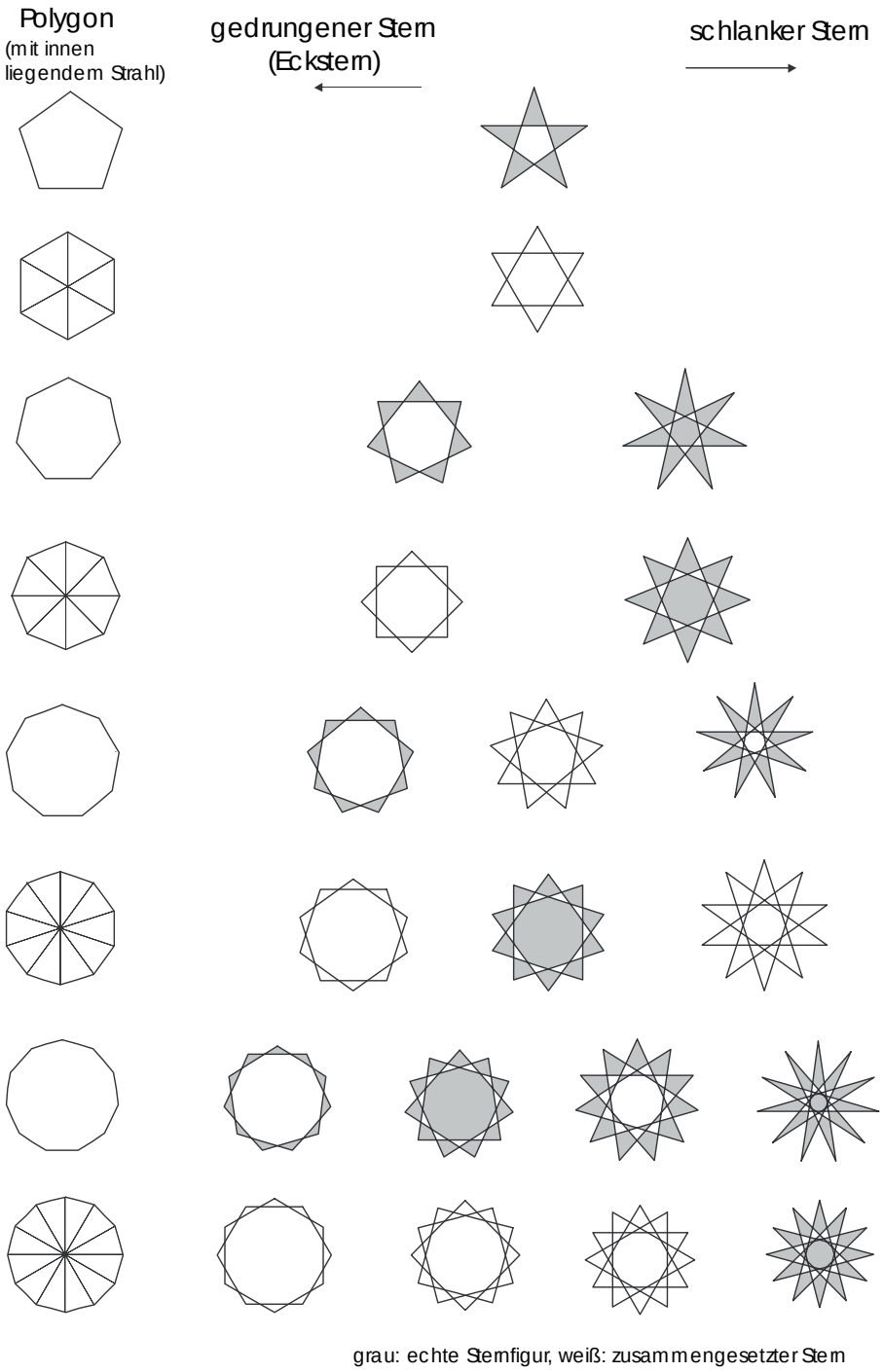


Abb. 1.4 Sternfiguren bis zur Zahl Zwölf

Gerade und ungerade Sterne

Mit dem Fünfstern oder Pentagramm beginnt die Ordnung der Sterne und gleichzeitig die Reihe der ungeraden Sterne. Der Sechsstern, obwohl er noch gar kein echter Stern, sondern ein Mehrfachpolygon ist, eröffnet die Reihe der geraden Sterne. Die Abb. 1.5 zeigt uns noch einmal die jeweils ersten vier Mitglieder der beiden Sternreihen, die sich dann bis ins Unendliche fortsetzen ließen. Der Unterschied zur Abb. 1.4 ist, daß hier der Inkreis aller Sternfiguren gleich groß ist, in Abb. 1.4 war es der (dort nicht eingezeichnete) Umkreis. So tritt der prinzipielle Unterschied zwischen ungeraden und geraden Sternen noch deutlicher zu Tage.

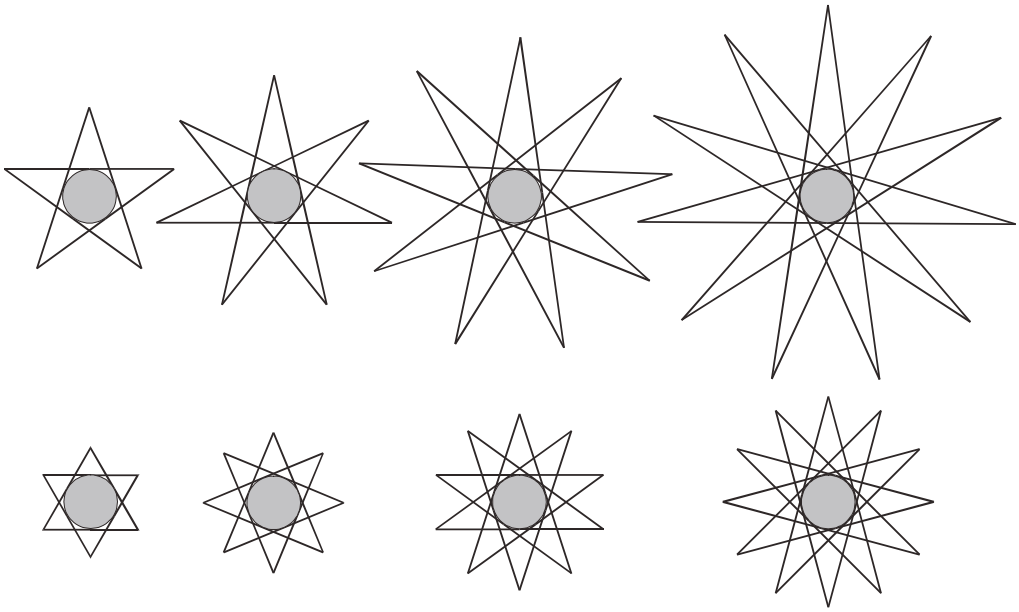


Abb. 1.5 Ungerade und gerade Sterne

Die ungeraden Sterne sind größer, schlanker und feingliedriger, die geraden haben einen im Verhältnis zum gesamten Körper größeren „Bauch“ und sind noch symmetrischer, wir könnten auch sagen, noch regelmäßiger.[2] Vielleicht sieht der Betrachter noch andere Unterschiede.

Es wird manchmal gesagt, daß gerade Zahlen bzw. Sternfiguren dem Weiblichen entsprechen und ungerade dem Männlichen. Inwieweit sich das mit der sichtbaren Charakteristik der Sternfiguren deckt, mag zunächst jeder für sich selbst befinden, später werden wir diese Thematik wieder aufgreifen.

Was könnte der geometrische Grund sein, daß es „Weibchen und Männchen“ bei den Sternfiguren gibt, d.h. daß gerad- und ungeradzahlige Sterne sich unterschiedlich verhalten?

Eine weitere Besonderheit der geradzahligen Sterne soll aber noch erwähnt werden. Bei ihnen können wir noch einmal differenzieren. In der unteren Reihe der Abb. 1.5

[2] mathematisch genauer ausgedrückt: Sie haben eine Symmetrieebene mehr

sehen wir, daß sich der Sechsstern aus zwei Dreiecken zusammensetzt und der große Zehnstern aus zwei Pentagrammen. Acht- und Zwölfstern sind echte, nicht zusammengesetzte Sternfiguren. Der Vierzehnstern besteht wieder aus zwei Siebensternen, der 16-Stern ist ein echter usw.. Dies läßt sich verallgemeinern:

Alle durch 2, aber nicht durch 4 teilbaren Zahlen produzieren als größten Stern einen zusammengesetzten Stern.

Diese Zahlen sind die Verdopplungen der ungeraden Zahlen (6 = 2 * 3; 10 = 2 * 5, 14 = 2 * 7 etc.). Echte Sterne treten bei ihnen dann im Inneren als zweitgrößter Stern auf, wie es z.B. für die Zahl Zehn die graue Figur in der Mitte der 10-er-Reihe in der Abb. 1.4 zeigt.

Bestimmungsgrößen der Sterne

Stellen wir nun die Bestimmungsgrößen der Sterne zusammen, wir nehmen dafür wieder exemplarisch den Achtstern (Abb. 1.6).

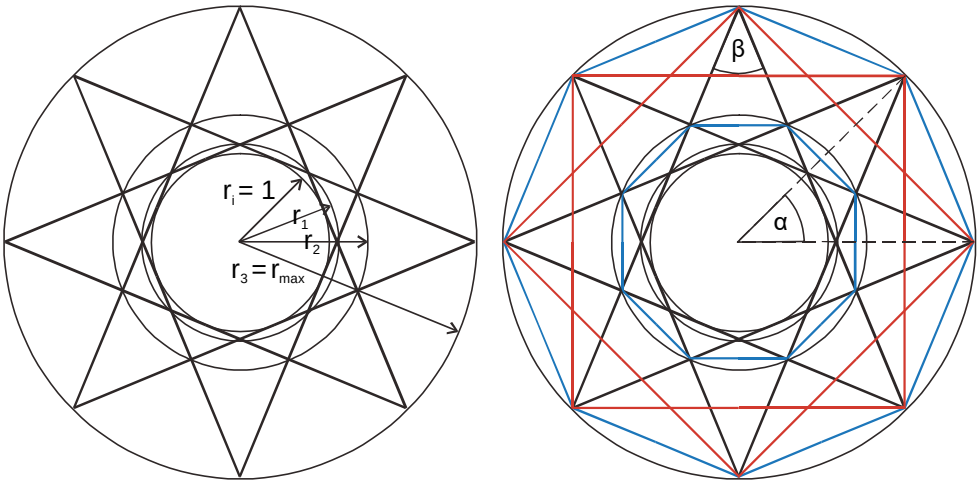


Abb. 1.6 Bestimmungsgrößen der Sternfiguren

Jeder regelmäßige Stern hat einen Umkreis und einen Inkreis; weiterhin lassen sich Kreise durch die Schnittpunkte der Seiten einzeichnen (Abb. 1.6a).

Der Inkreisradius heißt r_i, der Umkreisradius der inneren Eckfigur r_u oder r_1, die Radien der weiteren Kreise, r_2, r_3, ..., r_{max}.

Dementsprechend gibt es die Kreisflächen R_i, R_1, (= R_u), R_2 ..., R_{max}.

Wir setzen den Inkreisradius gleich Eins. Dadurch lassen sich die Längen- und Flächenmaße aller Sterne einer Zahl (inkl. der Eckfigur und der Umkreise) und ebenso aller anderen Zahlen aufeinander beziehen. Zum Beispiel beträgt so der Radius des Umkreises des Lakshmi-Sterns r_2 = Wurzel(2) (Berechnung folgt Anfang des 3. Kapitels). Um zu seiner Fläche zu kommen, brauchen wir diesen Wert nur zu quadrieren[3] und erhalten exakt 2, das heißt, die Kreisfläche R_2 ist genau doppelt so groß wie R_i.

[3] gemäß der Formel für die Kreisfläche $R = \pi * r^2$, siehe auch Anhang A7.4

In den maximalen Umkreis (mit dem Radius r_{max}) können auch alle sich im Inneren des größten Sterns automatisch ergebenden Figuren eingezeichnet werden, in diesem Fall das Achteck und der Lakshmi-Stern aus 2 Quadraten (Abb. 1.6b, blau und rot). Ich nenne sie dementsprechend Sterne im maximalen Umkreis.

Alle Schnittpunkte können durch ein Polygon verbunden werden (ebenfalls blau).

Alle auftretenden Figuren haben bestimmte, berechenbare Seiten und Flächen. Die Seiten eines Polygons bezeichnen wir mit a, die eines Sterns mit s, die Flächen von Polygon und Stern entsprechend mit A und S.

Weiterhin hat jeder Stern einen Umfang. Dieser ergibt sich aus den 2 * n Seiten (in diesem Fall 2 * 8 = 16) der Spitzen des Sterns. Hier kommt also auch einmal der „Hüllstern“ (Abb. 1.2a) zum Tragen.

Und natürlich sind auch die Winkel wichtige Größen, zum einen der Bestimmungs- oder Mittelpunktswinkel α (alpha), welcher 360°/n beträgt, hier also 360°/8 = 45°, zum anderen die Spitzenwinkel β (beta) der auftretenden Figuren.[4] Bei geradzahligen Sternen ist der Spitzenwinkel des größten Sterns gleich α (des Polygons), bei ungeradzahligen gleich α/2 (mehr darüber in Kap. 2).

Wie groß ist der Spitzenwinkel des Lakshmi-Sterns?

Zusammengefaßt haben wir also folgende Bestimmungsgrößen und ihre Kurzbezeichnungen, die uns helfen, wenn wir in den weiteren Kapiteln die Geheimnisse der Sternenordnung ergründen werden:

Radien der Kreise	r
Flächen der Kreise	R
Seiten der Eckfiguren	a
Flächen der Eckfiguren	A
Seiten der Sternfiguren	s
Flächen der Sternfiguren	S
Flächen der Sternfiguren im maximalen Umkreis	Su
Umfang der Sternfiguren	U
Mittelpunktswinkel	α
Spitzenwinkel	β

Zur Vertiefung des Bisherigen werfen wir nun noch einen Blick auf den Zehnstern (Abb. 1.7). Links haben wir den großen Zehnstern aus zwei Pentagrammen. Die sich durch dessen Linien im Inneren bildenden Figuren sind in Originalgröße nach rechts herausgezogen. Den großen Stern, in dem die anderen enthalten sind, wollen wir Hauptstern nennen, die anderen Nebensterne.

[4] In Mathematikbüchern wird der Bestimmungswinkel normalerweise Mittelpunkts- oder Zentriwinkel genannt, der Spitzenwinkel Innenwinkel. Spitzenwinkel erscheint mir passender.

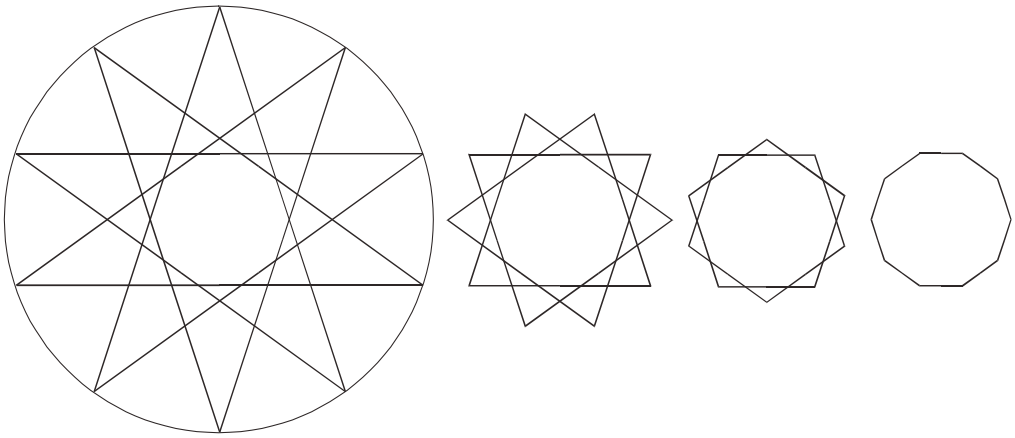


Abb. 1.7 Großer Zehnstern, Nebensterne inklusive Polygon

Wir haben alle vier möglichen Typen im Zehnstern vereinigt: einen Mehrfachstern (zwei Pentagramme), einen echten Stern (in einem Linienzug zu zeichnen), ein Mehrfachpolygon (zwei Fünfecke) und die Eckfigur. Wie bereits erwähnt, ist der große Zehnstern der erste Mehrfachstern in der unendlichen Reihe der Sterne. Der Zehnstern weist zudem eine besondere Harmonie im Sternenreich auf, da in ihm (und nur in ihm) jeder mögliche Figurentyp genau einmal auftritt.[5]

Warum kann es keinen zweiten Stern geben, in dem jeder der vier Figurentypen nur einmal oder gleich oft vertreten ist?

Wieviel Figuren (Sterne und Polygon) bildet der Zwölfstern insgesamt, d.h inklusive des Hauptsterns (jedoch ohne Strahlfigur)?

Nun brauchen wir noch eine kurze Bezeichnung, um die verschiedenen Sterne voneinander zu unterscheiden, so daß man nicht immer langatmig z.B. sagen muß, der Fünfzehnstern aus 5 Dreiecken. Wir verdanken sie dem Schweizer Mathematiker Ludwig Schläfli (1814 - 1895), und die Kurzbezeichnung nennt sich Schläfli-Symbol. Die in Abb. 1.7 gezeigten Figuren haben in dieser Reihenfolge (von links nach rechts) die Schläfli-Symbole {10/4}, {10/3}, {10/2} und {10/1}. Die erste Zahl gibt also immer die Zahl n des Sterns an, die zweite die Nummer der Figur (als allgemeinen Buchstaben nimmt man k), angefangen beim Polygon. Das Polygon hat demnach bei jeder Zahl n das Symbol {n/1}. Die höchste Zahl ist die der möglichen Figuren, in diesem Fall 4. Das allgemeine Schläfli-Symbol lautet {n/k}.

Wie lautet das Schläfli-Symbol des großen Neunsterns und wie das des Zwölfsterns aus vier Dreiecken?

[5] Mehr darüber findet man auf den eindrucksvollen Internetseiten von Holger Ullmann: http://tetraktys.de

Wie wir beim Achtstern gesehen hatten, können wir in den maximalen Umkreis auch alle anderen Figuren einzeichnen. Das läuft darauf hinaus, daß alle Eckpunkte in einem Polygon miteinander verbunden werden. Insofern gehört bei dieser Darstellung auch die Strahlfigur durch den Mittelpunkt (bei geraden Zahlen) dazu.

Beschließen wir dieses erste Kapitel mit einem ästhetischen Anblick. Die genannte Darstellungsweise wurde in der Abb. 1.8 für den 8- bis 13-Stern ausgeführt. Ich bezeichne diese Art von Figur, für die ich keinen eindeutigen Begriff in der Literatur gefunden habe, als Stern-Simplex (siehe auch Glossar).[6]

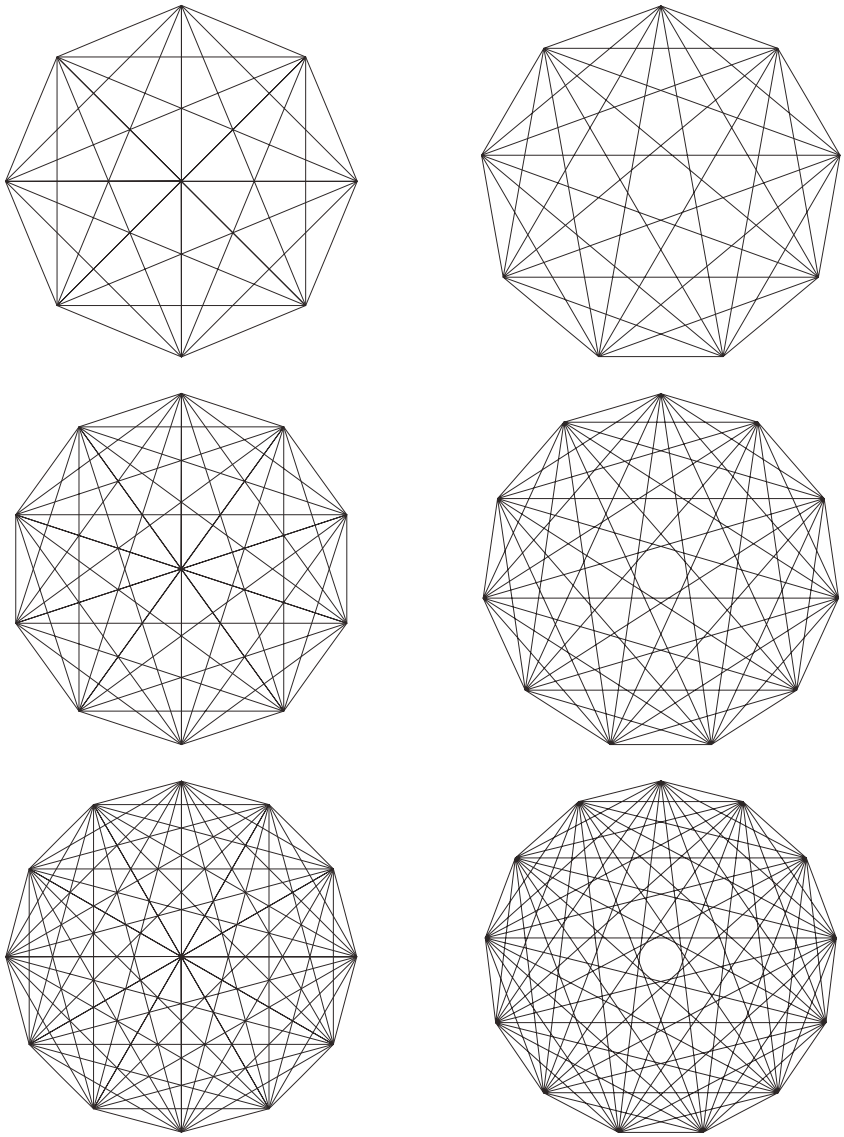


Abb. 1.8 Stern-Simplexe des 8 – 13-Sterns.

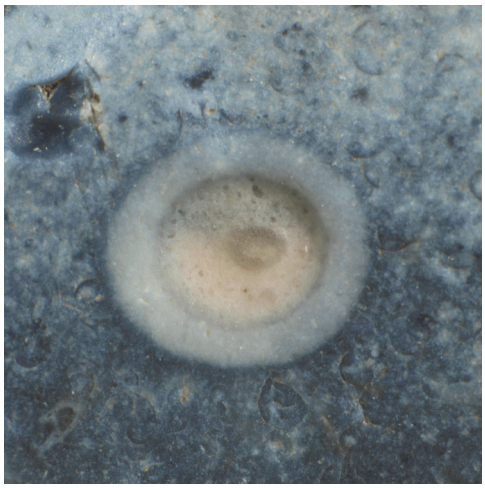
[6] Sehr interessante Zusammenhänge der Stern-Simplexe mit dem Pascalschen Dreieck und n-dimensionalen Tetraedern – die hier zu erläutern zu weit führen würde – siehe ebenfalls http://tetraktys.de/geometrie-4.html

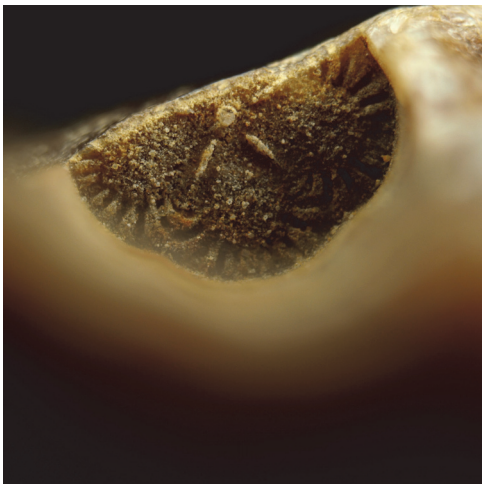
Exkurs 1 Geometrie im Feuerstein

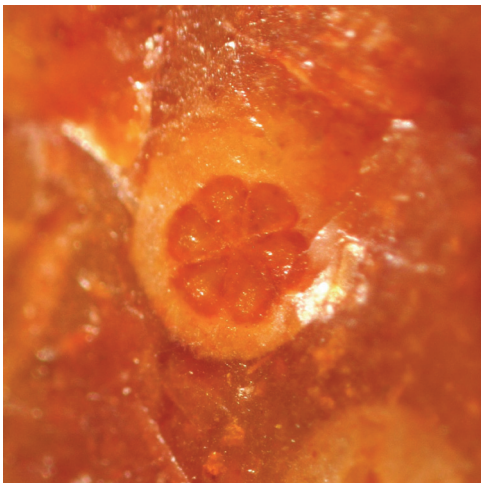
In Norddeutschland findet man fast überall in der Natur, an Wegen, auf Feldern, am Strand, in Aufgrabungen etc. Feuersteine. Sie wurden in den Eiszeiten aus weiter nördlichen Gefilden hierher transportiert. Es gibt sie in nahezu allen Farben. Sie sind aus Ablagerungen (Sedimentation) von Siliziumdioxid in Kalksteinen entstanden. Manchmal enthalten sie Versteinerungen von Seeigeln, Seelilien etc. oder sind sogar in der betreffenden Form versteinert. Relativ häufig findet man in ihnen, wenn man genau hinschaut, versteinerte Mikrorganismen, nur wenige Millimeter groß, zum Teil sogar noch kleiner.

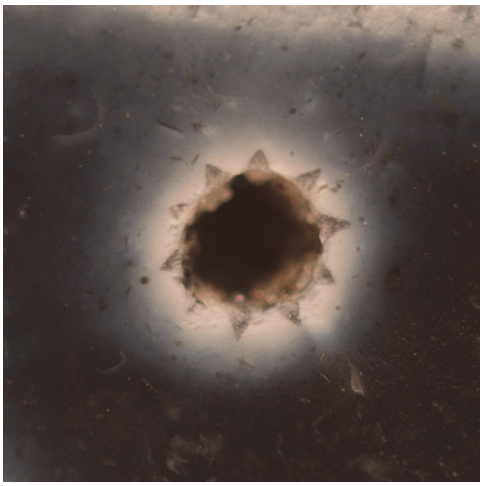
Manchmal werden Menschen von Leidenschaften gepackt, die dann ein paar Jahre andauern. So hatte ich meine „Steinzeit“. Ausgelöst wurde sie durch bestimmte Erlebnisse. Eines davon war, daß ich in einer Sandkuhle wellenartige Strukturen im Sand sah, die durch strömendes Wasser entstanden waren. Ich fühlte mich als Zeuge eines urzeitlichen, das Antlitz der Erde prägenden Geschehens, das mich tief berührte. In der Wand der Kuhle fand ich einen Stein, von dem wir in Bild E1.9 (vorletztes Bild) einen Ausschnitt sehen. Die runde Struktur hat im Original einen Durchmesser von einem Millimeter. Mit dem bloßen Auge sieht man nur einen Kreis mit einem dunklen Punkt in der Mitte. Mit der Lupe, die ich zu der Zeit immer dabei hatte, kann man schon eine strahlenartige, sternförmige Struktur erkennen. Es hatte mich total gepackt. Ich wollte wissen, was das ist, und ich wollte es photographieren können. So besorgte ich mir in den nächsten Monaten die entsprechende Ausrüstung, die das ermöglichte. Ich besuchte zudem Kurse an der Volkshochschule und erfuhr von dem sympathischen Geologen, der diese gab, daß es ein Schnitt durch einen Seeigelstachel ist, den man da sieht.

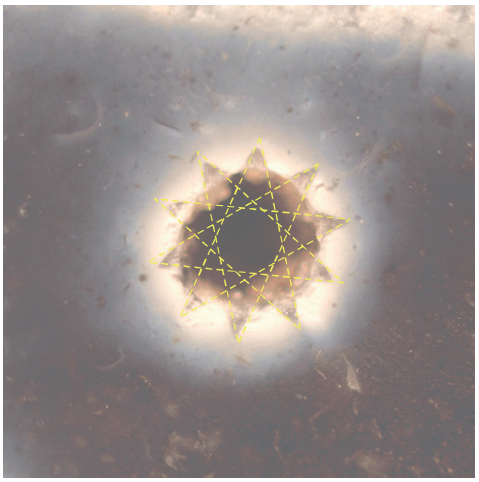
Auch die meisten der anderen Versteinerungen konnte er mir benennen. Häufig treten dabei Bryozoen, deutsch Moostierchen, auf (Bild E1.2, 5 und 6), weiter eben Seeigelstacheln (Bild 9 und 10) und Seeliliengleder (4). Die kreisförmige Struktur in Bild 1 ist vermutlich rein mineralisch. Im Laufe der Zeit fand ich regelmäßige Kreisteilungen der meisten Zahlen bis zur Sechzehn, teils sternartig ausgeprägt, in den versteinerten Strukturen, die einstmals lebendige Wesen waren.











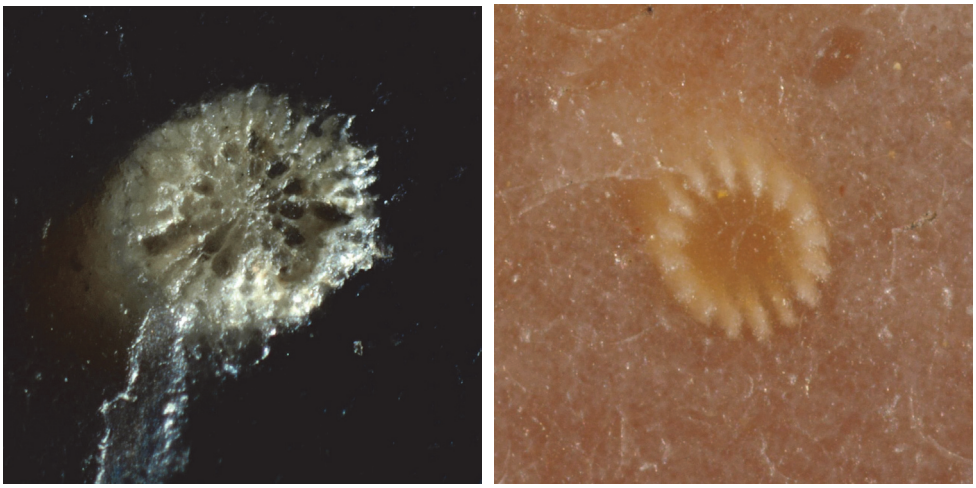


Abb. E1.1 bis 10 Geometrische Strukturen in Feuersteinen aus Norddeutschland.

Steine aus dem Norden

Die 1. Zeile dankt sich dem Buch:
‘Steine aus dem Norden’ von Per Smed

Kamen Steine aus dem Norden,
kamen mit dem Eise her,
sind zum Schmucke hier geworden
in den Gärten und am Meer.

Steine, womit schmückt denn ihr,
daß die Menschen euch gesellen
ihrer Statt, dem Grab zur Zier?
Saget eures Zaubers Quellen!

Sprechen von der Erde Walten,
tief im Innren sie erschafft,
Zeugen sind wir vom Uralten,
bilden ab des Kosmos Kraft,

dessen Stürme sich einprägen
in Strukturen, kaum erkannt.
Und ein Ahnen wird sich regen:
Stein und Sterne sind verwandt.

Liegen Steine an den Wegen,
liegen still im Wind am Strand.[7]

[7] aus: Hartmut Warm, Die rettenden Verse noch ungeschrieben – Die Winterreise 2011