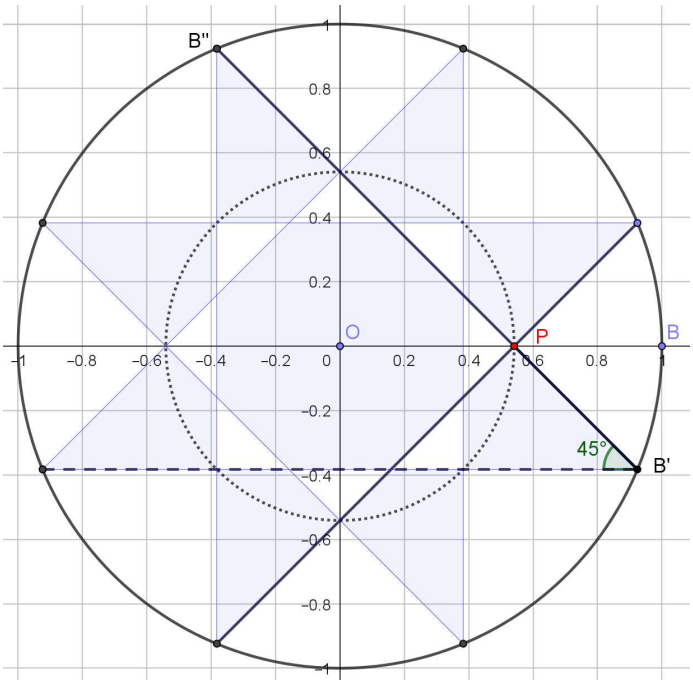
H.Warm Tabelle 3.3



in der Zeichnung ist n = 8
Zackenwinkel α = 45°
B′ entsteht aus B durch Drehung
um -α/2 = -22,5°
B′(cos(α/2)| -sin(α/2))

1.Behauptung:
Gegeben ist der n-Stern {n / (n/2-1)}
mit n gerade. Dann gilt:
Der Radius r_2 des inneren Kreises (d.h. des Umkreises von {n / n/2-2}) ist
$r_2 = x(P) \to 0{,}5$ für $n \to \infty$.

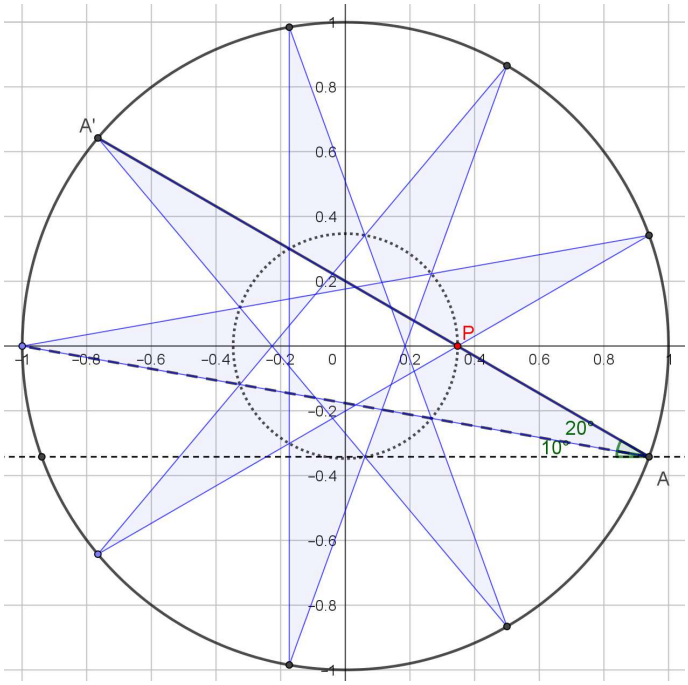
Beweis:
x(P) ist die Nullstelle der Gerade B′B′′.
Die Gerade y = mx + t ist durch den Punkt B′ und den Steigungswinkel -α festgelegt mit α = 360°/n.
Steigung m = tan(-α) = -tan(α).
m und B′(cos(α/2)| -sin(α/2)) eingesetzt: -sin(α/2) = -tan(α)cos(α/2) + t
also t = tan(α)cos(α/2) - sin(α/2),
was die Gerade y = -tan(α)*x + tan(α)cos(α/2) - sin(α/2) ergibt.

Nullstelle x = x(P):
0 = -tan(α)*x + tan(α)cos(α/2) - sin(α/2) ⇔ tan(α)x = tan(α)cos(α/2) - sin(α/2)
⇔ x = cos(α/2) – sin(α/2)/tan(α).
Wegen $n \to \infty$ geht $\alpha \to 0°$, damit $\cos(\alpha/2) \to 1$ und $\sin(\alpha/2) \to 0$ aber auch der Nenner $\tan(\alpha) \to 0$, daher muss sin(α/2)/tan(α) umgeformt und dann gekürzt werden, so dass der Nenner nicht mehr → 0 geht.
Mit der Identität: $\tan(\alpha) = 2\tan(\alpha/2) / (1 - \tan^2(\alpha/2))$ folgt:

$$x = \cos(\alpha/2) - \frac{\sin(\alpha/2)\cdot(1-\tan^2(\alpha/2))}{2\tan(\alpha/2)}$$

, mit tan(α/2) = sin(α/2)/cos(α/2) kann nun sin(α/2) gekürzt werden.
$x = \cos(\alpha/2) - 0{,}5\cos(\alpha/2)*(1-\tan^2(\alpha/2))$.
Nun steht $n \to \infty$ nichts mehr im Wege und somit $x = r_2 \to 1 - 0{,}5*1*(1-0) = 0{,}5$.

H.Warm Tabelle 3.4



in der Zeichnung ist n = 9
Zackenwinkel α = 180°/9 = 20°
A(cos(α)| -sin(α))

2.Behauptung:
Gegeben ist der n-Stern {n / (n-1)/2} mit n ungerade. Dann gilt:
Der Radius r_2 des inneren Kreises (d.h. des Umkreises von {n / (n-1)/2-1}) ist $r_2 = x(P) \to 1/3$ für $n \to \infty$.

Beweis:
x(P) ist die Nullstelle der Gerade AA´.
Die Gerade y = mx + t ist durch den Punkt A und den Steigungswinkel -1,5α festgelegt mit α = 180°/n.
Steigung m = tan(-1,5α) = -tan(1,5α).
m und A(cos(α)| -sin(α)) eingesetzt: -sin(α) = -tan(1,5α)cos(α) + t
also t = tan(1,5α)cos(α) - sin(α),
was die Gerade y = -tan(1,5α)*x + tan(1,5α)cos(α) - sin(α) ergibt.

Nullstelle x = x(P):
0 = -tan(1,5α)*x + tan(1,5α)cos(α) - sin(α) ⇔ tan(1,5α)x = tan(1,5α)cos(α) - sin(α)
⇔ x = cos(α) – sin(α)/tan(1,5α).
Mit den Identitäten
(s. https://de.wikipedia.org/wiki/Formelsammlung_Trigonometrie#Winkelfunktionen_f%C3%BCr_weitere_Vielfache und
https://de.wikipedia.org/wiki/Formelsammlung_Trigonometrie#Doppelwinkelfunktionen):

$\tan(3x) = \dfrac{3\tan(x)-\tan^3(x)}{1-3\tan^2(x)}$ angewendet auf x = α/2 folgt:

$\tan(1{,}5\alpha) = \dfrac{3\tan(\alpha/2)-\tan^3(\alpha/2)}{1-3\tan^2(\alpha/2)} = \dfrac{\tan(\alpha/2)\cdot(3-\tan^2(\alpha/2))}{1-3\tan^2(\alpha/2)}$

ferner gilt: $\sin(\alpha) = \dfrac{2\tan(\alpha/2)}{1+\tan^2(\alpha/2)}$

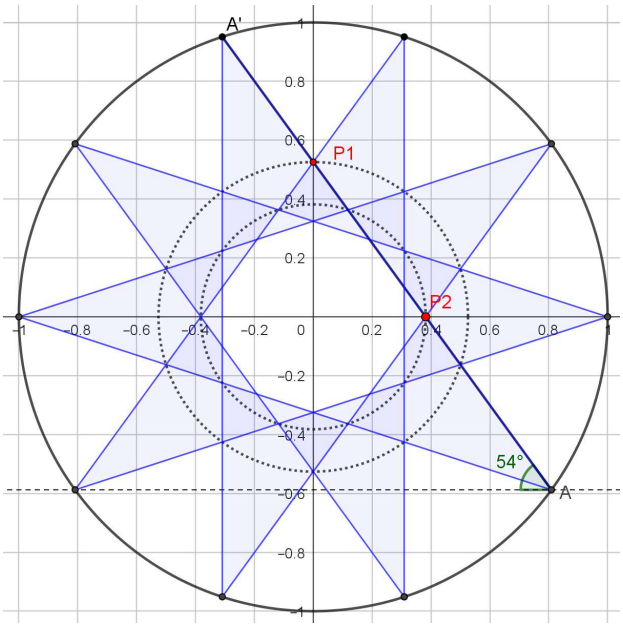
damit ist: $\sin(\alpha)/\tan(1{,}5\alpha) = \dfrac{2\tan(\alpha/2)}{1+\tan^2(\alpha/2)} \cdot \dfrac{1-3\tan^2(\alpha/2)}{\tan(\alpha/2)\cdot(3-\tan^2(\alpha/2))}$

$= \dfrac{2\cdot(1-3\tan^2(\alpha/2))}{(1+\tan^2(\alpha/2))\cdot(3-\tan^2(\alpha/2))}$

mit $n \to \infty$ geht $\alpha \to 0°$, damit $\cos(\alpha) \to 1$ und $\tan(\alpha/2) \to 0$,
also geht der Zähler des letzten Ausdrucks gegen 2·1 = 2, der Nenner gegen 1·3 = 3 und insgesamt $x = r_2 \to 1 - 2/3 = 1/3$.

H.Warm Tabelle 3.3

in der Zeichnung ist n = 10
Zackenwinkel α = 36°
A(cos(α)| -sin(α))

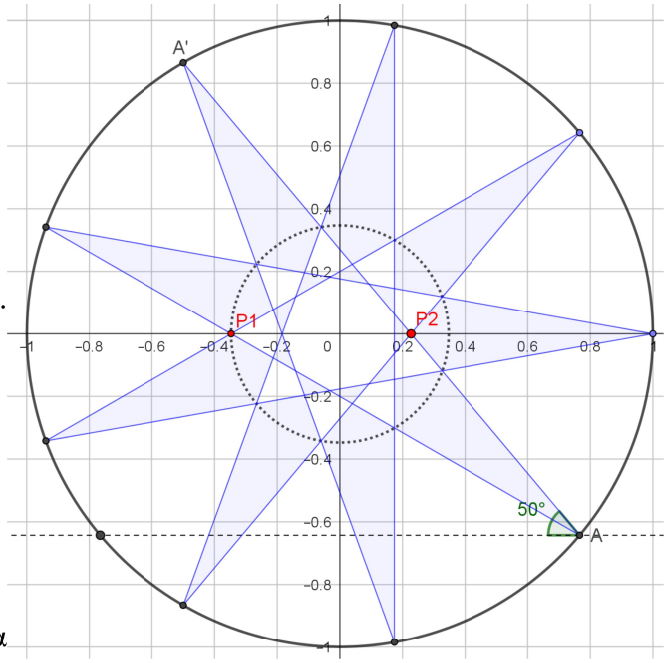


3.Behauptung:
Gegeben ist der n-Stern {n / (n/2-1)}
mit n gerade. Dann gilt:
Der Radius r_3 des inneren Kreises (d.h. des Umkreises von {n / (n/2-3)}) ist
$r_3 = x(P) \rightarrow 1/3$ für $n \rightarrow \infty$.
Damit gilt: $r_3/r_2 = (1/3) / (½) = 2/3$.

Beweis:
x(P) ist die Nullstelle der Gerade AA´.
Die Gerade y = mx + t ist durch den Punkt A und den Steigungswinkel -1,5α festgelegt. Steigung m = tan(-1,5α) = -tan(1,5α).
Weiter wie bei 2.Behauptung: $x = r_3 \rightarrow 1/3$.

H.Warm Tabelle 3.4

in der Zeichnung ist n = 9
Zackenwinkel α = 180°/9 = 20°
A(cos(2α)| -sin(2α))



4.Behauptung:
Gegeben ist der n-Stern {n / (n-1)/2}
mit n ungerade. Dann gilt:
Der Radius r_3 des inneren Kreises (d.h. des Umkreises von {n / (n/2-3)}) ist
$r_3 = x(P) \rightarrow 1/5$ für $n \rightarrow \infty$.
Damit gilt: $r_3/r_2 = (1/5) / (1/3) = 3/5$.

Beweis:
x(P) ist die Nullstelle der Gerade AA´.
Die Gerade y = mx + t ist durch den Punkt A und den Steigungswinkel -2,5α festgelegt. Steigung m = -tan(,5α).
m und A eingesetzt: -sin(2α) = -tan(2,5α)cos(2α) + t
also t = tan(2,5α)cos(2α) - sin(2α),
was die Gerade y = -tan(2,5α)*x + tan(2,5α)cos(2α) - sin(2α) ergibt.
Nullstelle x = x(P):
0 = -tan(2,5α)*x + tan(2,5α)cos(2α) - sin(2α) ⇔ tan(2,5α)x = tan(2,5α)cos(2α) - sin(2α)
⇔ x = cos(2α) – sin(2α)/tan(2,5α).

Mit den Identitäten
(s. https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_trigonometric_identities und
https://de.wikipedia.org/wiki/Formelsammlung_Trigonometrie#Winkelfunktionen_f%C3%BCr_weitere_Vielfache):

$$\tan(n\theta) = \frac{\sum_{k\ \text{odd}} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \binom{n}{k} \tan^k \theta}{\sum_{k\ \text{even}} (-1)^{\frac{k}{2}} \binom{n}{k} \tan^k \theta}$$

mit n = 5 angewendet auf θ = α/2 folgt:

$$\tan(2{,}5\alpha) = \frac{5\tan(\alpha/2) - 10\tan^3(\alpha/2) + \tan^5(\alpha/2)}{1 - 10\tan^2(\alpha/2) + 5\tan^4(\alpha/2)}$$

$$= \tan(\alpha/2)\cdot\left(\frac{5 - 10\tan^2(\alpha/2) + \tan^4(\alpha/2)}{1 - 10\tan^2(\alpha/2) + 5\tan^4(\alpha/2)}\right)$$

ferner: $\sin(4x) = \sin(x)\cos(x)\cdot(8\cos^2(x) - 4)$ angewendet auf x = α/2

ergibt: $\sin(2\alpha)/\tan(2{,}5\alpha) =$

$$= \frac{\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)(8\cos^2(\alpha/2) - 4)\cdot(1 - 10\tan^2(\alpha/2) + 5\tan^4(\alpha/2))}{\tan(\alpha/2)\cdot(5 - 10\tan^2(\alpha/2) + \tan^4(\alpha/2))}$$

$$= \frac{\cos^2(\alpha/2)(8\cos^2(\alpha/2) - 4)\cdot(1 - 10\tan^2(\alpha/2) + 5\tan^4(\alpha/2))}{(5 - 10\tan^2(\alpha/2) + \tan^4(\alpha/2))}$$

für $n \to \infty$ geht $\alpha \to 0°$
⇒ der Zähler $\to 1\cdot(8-4)\cdot 1 = 4$, der Nenner $\to 5$
insgesamt $x = r_3 \to 1 - 4/5 = 1/5$
und $r_3/r_2 = (1/5) / (1/3) = 3/5$.